

DOI: <https://doi.org/10.25689/NP.2025.3.150-169>

EDN NMWBPO

УДК 622.276.031:532.5

Приближенный учет изменения сжимаемости коллектора и нефти при неустановившейся фильтрации

¹Иктисанов В.А., ²Иктисанов А.В., ¹Бернатов М.С.

¹Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II,
Санкт-Петербург, Россия

²«Московский физико-технический институт» (национальный исследовательский
университет), Москва, Россия

Rough consideration of changes in formation and oil compressibility during unsteady-state flow

¹V.A. Iktisanov, ²A.V. Iktisanov, ¹M.S. Bernatov

¹St. Petersburg Mining University of Empress Catherine II, St. Petersburg, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Moscow, Russia

E-mail: iktisanov_va@pers.spmi.ru

Аннотация. В существующих программных комплексах для гидродинамического моделирования, анализа добычи, интерпретации результатов гидродинамических исследований используются линейная и гораздо реже экспоненциальная зависимости пористости от давления. Исследования различных авторов, начиная от Terzaghi К. и включая наши, свидетельствуют о логарифмической зависимости пористости от давления, что приводит к обратной зависимости сжимаемости коллектора от давления. Аналогичная зависимость от давления характерна и для различных нефтей согласно работам Vasquez M., Beggs H.D. В связи с этим предложен и апробирован приближенный алгоритм расчета уравнения пьезопроводности с учетом обратной зависимости сжимаемости от давления, определен порядок коэффициентов пропорциональности для нефти и горной породы. Выполненные расчеты показывают, что отсутствие учета рассматриваемого фактора приводит к ошибочному завышению скин-фактора, занижению проницаемости и к существенному занижению расстояния до границ пласта. Последнее обстоя-

тельство наиболее важно при оценке запасов по результатам гидродинамических исследованиях разведочных и поисковых скважин. Основные отличия от линейной фильтрации определяются различием коэффициента сжимаемости и обратной функции сжимаемости от давления. Наибольший эффект от предлагаемого подхода в сравнении с линейной фильтрацией наблюдается для высокой сжимаемости нефти, коллектора и значительных депрессий.

Ключевые слова: уравнение пьезопроводности, гидродинамические исследования, сжимаемость от давления, пористость, нефть, горная порода, давление

Для цитирования: Иктисанов В.А., Иктисанов А.В., Бернатов М.С. Приближенный учет изменения сжимаемости коллектора и нефти при неустановившейся фильтрации // Нефтяная провинция.-2025.-№3(43).-С. 150-169. - DOI <https://doi.org/10.25689/NP.2025.3.150-169>. - EDN NMWBPO

Abstract. Existing software packages for reservoir simulation, production analysis, and well test interpretation rely on linear and, much less often, exponential dependences of porosity on pressure. Various studies, including those conducted by Terzaghi K., suggest a logarithmic pressure dependence of porosity and hence inverse relationship between formation compressibility and pressure. Similar pressure dependence is observed for various oils according to Vasquez M., Beggs H.D. In light of the above, a rough algorithm for estimation of diffusivity equation is proposed and tried out with account of inverse pressure dependence of compressibility, the order of proportionality coefficients for oil and rock is defined. Estimation results suggest that should the factor under current discussion be neglected, then erroneous overestimation of skin factor, underestimation of permeability, and substantial underestimation of the distance to formation boundaries are observed. The latter point is the most important for reserves estimation based on well test data from wildcat and exploratory wells. The main differences from linear flow are defined by contrasting compressibility factor and inverse function of compressibility versus pressure. The most pronounced effect from the proposed approach compared with linear flow is observed for high oil and formation compressibility and large pressure drawdowns.

Key words: diffusivity equation, well tests, compressibility versus pressure, porosity, oil, rock, pressure

For citation: V.A. Iktissanov, A.V. Iktisanov, M.S. Bernatov Priblizhennyuy uchet izmeneniya szhimayemosti kollektora i nefi pri neustanovivsheysya fil'tratsii [Rough consideration of changes in formation and oil compressibility during unsteady-state flow]. Neftyanaya Provintsiya, No. 3(43), 2025. pp. 150-169. DOI <https://doi.org/10.25689/NP.2025.3.150-169>. EDN NMWBPO (in Russian)

Введение

При гидродинамическом моделировании залежей нефти интерпретация результатов гидродинамических исследований и решения ряда схожих

задач для описания процессов неустановившейся фильтрации жидкости используется уравнение пьезопроводности (diffusion equation). Данный тип уравнения аналогичен уравнению теплопроводности, рассмотренному Карслоу Г.С, в конце 19 века, что учли Muskat M., Hurst W. [1, 2] при его решении. Ряд уточнений в данное уравнение внес наш выдающийся соотечественник Щелкачев В.Н. [3]. Классические уравнения пьезопроводности, полученные этими авторами, справедливы для слабосжимаемых жидкости и породы, когда коэффициенты сжимаемости можно принять постоянными [4]. Кроме этого, предполагалось, что проницаемость и вязкость также являлись неизменными параметрами.

Безусловно, принятые допущения далеки от действительности, т.к. ни один из упомянутых выше параметров не является константой [5-11]. На данный момент предложено несколько разновидностей уравнения пьезопроводности – для деформируемых коллекторов [5, 12-16], фильтрации нелинейно-вязкой жидкости [4, 6, 17, 18], с учетом релаксационных процессов [17], высоких скоростей фильтрации и др. Кроме того, известны различные подходы к решению уравнений пьезопроводности: для скважины нулевого и конечного радиусов, с учетом и без учета скин-фактора и послепритока (влияния ствола скважины), для вертикальных скважин и скважин с горизонтальным окончанием, для бесконечного пласта и с непроницаемыми или замкнутыми границами и др. [19, 20].

Точность описания реальной фильтрации уравнениями пьезопроводности и точность решения этих уравнений значительным образом влияют на точность гидродинамических расчётов, которые в свою очередь влияют на достоверность определяемых параметров и успешность различных методов проектирования, контроля и управления процессами разработки нефтяных месторождений. Сжимаемость коллектора и насыщающих его флюидов является одним из наиболее существенных факторов при описании процессов неустановившейся фильтрации. В связи с этим, в данной работе рассмотрим

задачу более точного учета сжимаемости горной породы и жидкости в уравнениях пьезопроводности, т.к. именно эти параметры ответственно за скорость перераспределения давления в пласте.

Уравнение пьезопроводности с изменяющимся коэффициентом сжимаемости

Классический подход к выводу уравнения пьезопроводности заключается в использовании уравнения неразрывности, уравнения Дарси и уравнений состояния для жидкости и пористой среды, которые вместе приводят к следующему уравнению [19]:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \rho m \frac{\partial P}{\partial t} \left[\frac{\partial m}{m \partial P} + \frac{\partial \rho}{\rho \partial P} \right] = \rho m \frac{\partial P}{\partial t} [\beta_{\text{ск}} + \beta_{\text{ж}}] = \rho \frac{k}{\mu} \nabla^2 P, \quad (1)$$

где ρ - плотность жидкости, m - пористость, t - время, P - давление, k - проницаемость, μ - вязкость жидкости, $\beta_{\text{ж}}$ - коэффициент сжимаемости жидкости, $\beta_{\text{ск}}$ - коэффициент сжимаемости породы.

Из уравнения (1) легко получить известное уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \frac{m \mu (\beta_{\text{ск}} + \beta_{\text{ж}})}{k} = \frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{\kappa} = \nabla^2 P, \quad (2)$$

где параметр κ по предложению Щелкачева В.Н. назван коэффициентом пьезопроводности. В российской литературе под данным коэффициентом понимается несколько иное выражение $\kappa = \frac{k}{\mu(\beta_{\text{ск}} + m\beta_{\text{ж}})}$, что связано с иным представлением коэффициента сжимаемости породы [3]:

$$\beta_{\text{ск}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V_{\text{п}}}{\partial P} = -\frac{\partial m}{\partial P}, \quad (3)$$

здесь $dV_{\text{п}}$ – изменение порового объема, dP – изменение давления, V – поровый объем элемента горной породы.

Интегрирование уравнения (3) приводит к линейной зависимости пористости от давления в отличие от экспоненциальной зависимости, которую можно получить из формулы $\beta_{\text{ск}} = -\partial m / (m \partial P)$, отраженной в уравнении (1). В обоих рассмотренных случаях предполагается, что коэффициент

сжимаемости породы равен константе. Линейная, а иногда и экспоненциальная зависимость пористости от давления повсеместно используются в отечественных и зарубежных программах по гидродинамическому моделированию и интерпретации результатов гидродинамических исследований [5, 19]. Однако, в проведенных нами ранее экспериментах для 60 образцов керн, как и для ряда исследований других авторов [7, 9, 11], получен высокий коэффициент корреляции при аппроксимации пористости от давления логарифмической зависимостью (Рис. 1):

$$m = a \ln P + b, \quad (4)$$

где a – коэффициент перед логарифмом.

Логарифмическая зависимость характерна как для разгрузки, так и для нагрузки различных образцов керн в широком диапазоне изменения давления. Во всех проведенных нами экспериментах наблюдался излом логарифмических кривых, свидетельствующий об изменении структуры керн, что соответствует давлению трещинообразования. Знание данного давления важно при определении предельного забойного давления для добывающих и нагнетательных скважин [6].

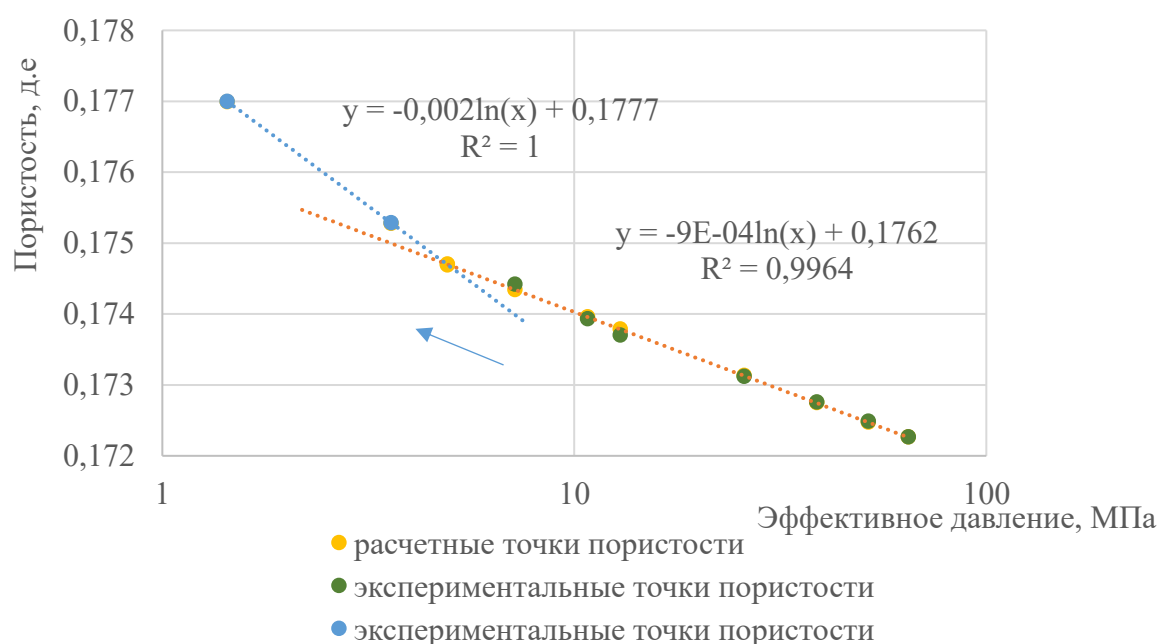


Рис. 1. Пример описания зависимости пористости от давления двумя логарифмическими кривыми

Полученная логарифмическая зависимость явно противоречит принятой линейной и тем более экспоненциальной функциям. Данное противоречие можно разрешить, приняв переменный коэффициент сжимаемости. Для этого определим его, продифференцировав согласно уравнению (3) полученную логарифмическую зависимость:

$$\beta_{\text{ск}} = \frac{\partial m}{\partial P} = (a \ln P + b)' = \frac{a}{P}. \quad (4)$$

Как видно, коэффициент сжимаемости оказался обратно пропорциональным давлению (Рис. 2). Если проинтегрировать полученную зависимость, то можно получить известную формулу Терцаги [7]:

$$m - m_0 = - \int_{P_0}^P \beta_{\text{ск}}(P) dP = - a \ln \left(\frac{P}{P_0} \right). \quad (5)$$

Данная формула подтверждает, что эксперименты с полученной логарифмической зависимостью пористости от давления не являются ошибкой. Формулу (5) можно получить и более простым путем, вычитая из уравнения (4) выражение $m_0 = a \ln P_0 + b$ для некоторого начального условия.

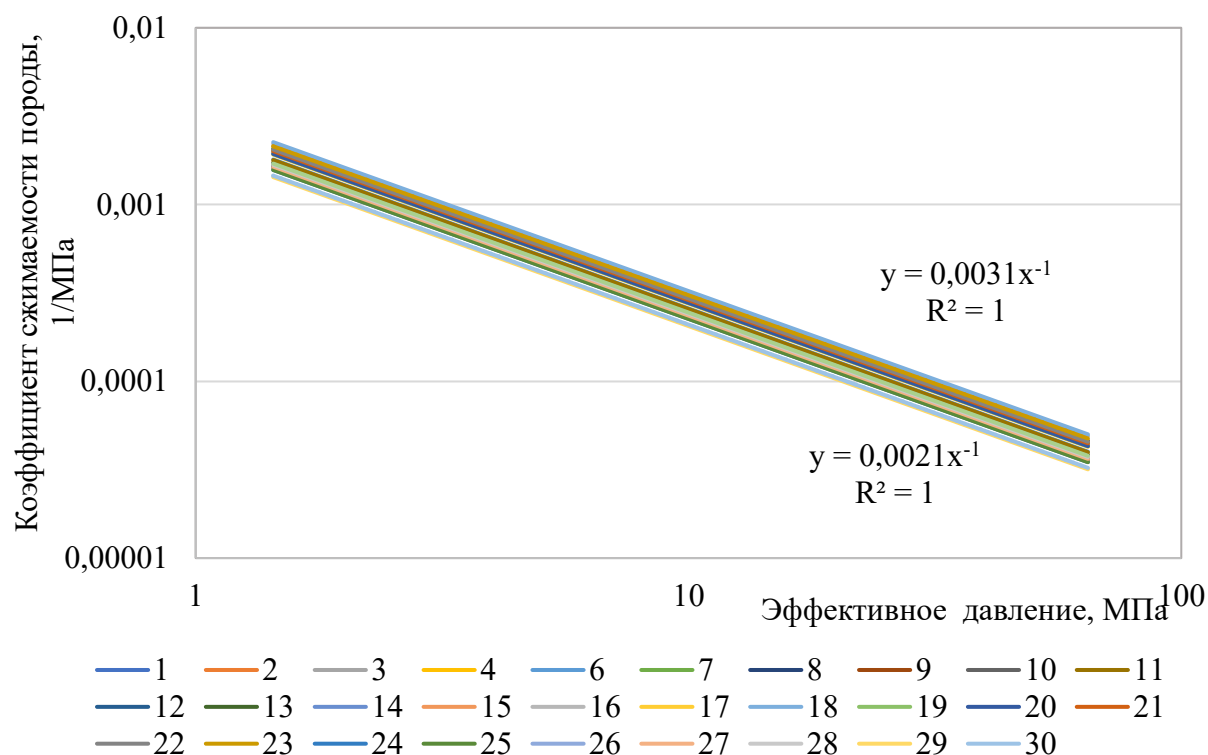


Рис. 2. Усредненный коэффициент сжимаемости для 30 образцов песчаника от давления

Если в качестве основы для коэффициента сжимаемости породы использовать условие из формулы (1), то можно получить несколько иное выражение, отличающееся появлением пористости:

$$\beta_{\text{ск}} = \frac{\partial m}{m \partial P} = (\ln[a \ln P + b])' = \frac{a}{mP}. \quad (6)$$

Однако и в этом случае коэффициент сжимаемости также обратно пропорционален давлению.

Заметим, что рассматриваемая тенденция справедлива не только для коллектора, но и для нефти при давлении выше давления насыщения (Рис. 3), о чем свидетельствует эмпирическая формула Vasquez, M., Beggs, H.D. [21], в которой давление присутствует в знаменателе. Тогда параметр a_n из формулы, аналогичной формуле (4), равен числителю формулы Vasquez, M., Beggs, H.D. и определяется газонасыщенностью нефти, плотностью нефти, плотностью растворенного газа и температурой. В зависимости от этих факторов параметр a_n может изменяться в большом диапазоне - $0,004 \div 0,04$.

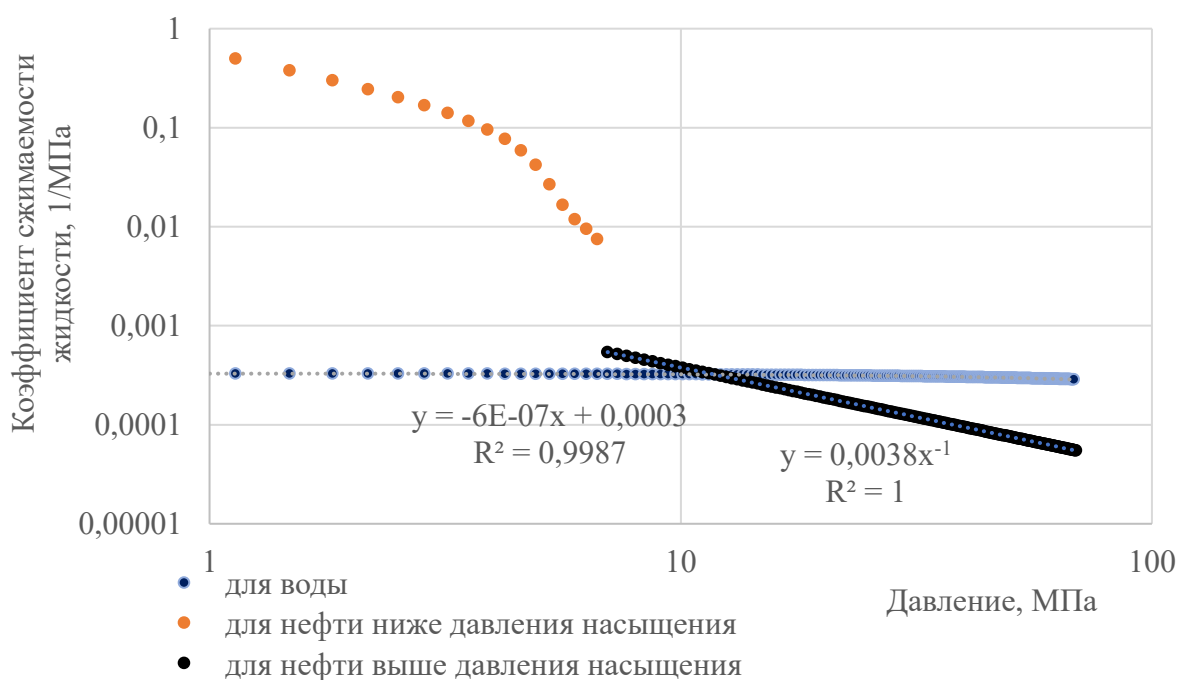


Рис. 3. Изменение коэффициента сжимаемости для жидкости
(взято с программы Rubis)

Как показали исследования керна, параметр $a_{\text{п}}$ для пористой среды принимает значения в диапазоне $0,0008 \div 0,004$. Условие $a_{\text{п}} < a_{\text{н}}$ полностью соотносится с условием $\beta_{\text{ск}} < \beta_{\text{н}}$, учитывая, что коэффициент сжимаемости, согласно различным литературным источникам, имеет порядок для нефти $0,001 \div 0,005 \text{ МПа}^{-1}$, для пористой среды $0,00003 \div 0,0003 \text{ МПа}^{-1}$ [3, 4, 12]. Попутно отметим, что параметр a является безразмерным и при подстановке давления в формулу (4) или (6) в МПа (Па), получается коэффициент сжимаемости соответствующей размерности МПа^{-1} (Па^{-1}). Постоянство коэффициента сжимаемости можно принять только для воды, которая обладает более простой молекулярной структурой.

Остается только заострится вопросом, почему в отечественном и зарубежном программном обеспечении игнорируется обратная зависимость сжимаемости от давления, которая наиболее близка к реальности в отличие от постоянных коэффициентов сжимаемости для породы и нефти?

Ответ на этот вопрос, вероятно, заключается в том, что использование постоянных коэффициентов сжимаемости приводит к линейности уравнений пьезопроводности и возможности использования метода суперпозиций по времени или по пространству. Однако данная тенденция допустима только при малых изменениях давления. В общем случае, т.е. при значительных изменениях давления, необходимо учитывать зависимость коэффициентов сжимаемости породы и нефти от давления (Рис. 2, 3). Для этого вместо суммы $\beta_{\text{ск}} + \beta_{\text{ж}}$ в уравнении (2) следует использовать $(a_{\text{п}} + a_{\text{н}})/P + \beta_{\text{в}}$. В первом приближении посчитаем, что пластовая вода отсутствует. При подстановке в классическое уравнение пьезопроводности получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \frac{\mu \alpha}{k(P+P_0)} = \nabla^2 P, \quad (7)$$

где P_0 – начальное забойное давление.

Приблизительное решение данного уравнения при использовании преобразования Лапласа приведено в Приложении. Полученное уравнение на первый взгляд является известным решением:

$$\overline{P_D} = \left[\frac{1}{u\sqrt{u}} \frac{K_0(\sqrt{u})}{K_1(\sqrt{u})} \right], \quad (8)$$

где $\overline{P_D}$ – безразмерное давление в преобразовании Лапласа, K_0 , K_1 – функции Бесселя, u – трансформанта Лапласа.

Для учета влияния скин-фактора и послепритока (влияния ствола скважины), итоговое уравнение в преобразовании Лапласа будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{P_{D2}} = \frac{1}{u} \left[\frac{S + u\overline{P_D}}{1 + uC_D(S + u\overline{P_D})} \right], \quad (9)$$

где S – скин-фактор; C_D – безразмерный коэффициент притока.

Для решения полученных уравнений используется обратное преобразование Лапласа по алгоритму Стефеста [22].

Отличие заключается в том, что вместо константы β^* в трансформанте Лапласа u задается выражение $\alpha/(P + P_0)$. Дополнительно к этому изменяется уравнение для безразмерного коэффициента послепритока:

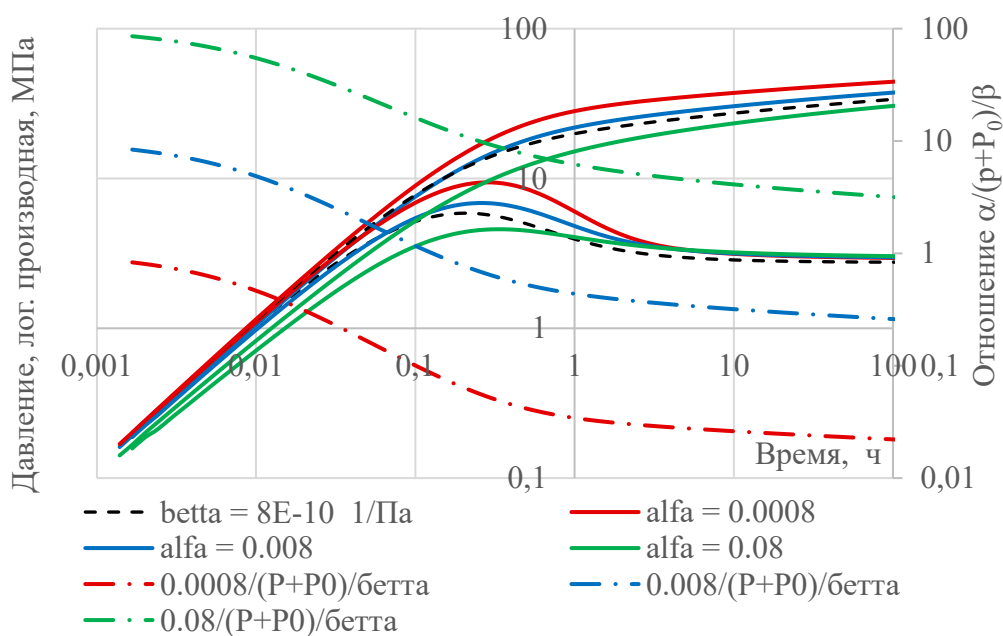
$$C_D = \frac{C(P + P_0)}{2\pi h \alpha r_w^2}. \quad (10)$$

В общем случае данная задача является неопределенной, т.к. для расчета давления необходимо задавать давление по формуле $\alpha/(P + P_0)$. Однако эту задачу можно решить с некоторым приближением при задании на некотором временном шаге предыдущего полученного давления.

Результаты моделирования

Перед проведением расчетов с учетом изменения коэффициента сжимаемости была выполнена апробация программы с классическими условиями по программе Saphir, которая показала полное совпадение результатов. Далее проведено само моделирование на примере вертикальной скважины,

которое привело к следующему выводу - с уменьшением параметра α увеличивается максимум производной, что ошибочно можно воспринять как высокий скин-фактор (Рис. 4). С увеличением α максимум производной снижается и может быть даже ниже классического решения с постоянным суммарным коэффициентом сжимаемости. Причина этого заключается в соотношении $\alpha/(P + P_0)$ и β , которое влияет на текущий коэффициент пьезопроводности, так при $\alpha/(P + P_0) < \beta$ пьезопроводность увеличивается в сравнении с традиционным решением, что приводит к более быстрому росту давления (красные кривые на рис. 4) и наоборот.



(верхние кривые – давление, нижние – производные)

Рис. 4. Влияние суммарного коэффициента альфа на вид кривых давления и лог производной в билогарифмических координатах

Заметим, что во всех случаях наблюдается более поздний выход на радиальный режим течения. В связи с этим время простоя скважины для снятия качественной кривой восстановления давления (КВД) увеличивается. Причем в общем случае наличие традиционной «полочки» производной не наблюдается, а происходит только стремление к ней (Рис. 4, 5). При-

чина этого заключается в постоянном увеличении коэффициента пьезопроводности по мере роста давления, в свою очередь увеличение давления также приводит к росту текущего коэффициента пьезопроводности.

По этой же причине происходит более быстрое реагирование на границы пласта в сравнении с традиционным решением для модели линейной фильтрации (Рис. 5). В частности, при безразмерном радиусе $rD=2500$ и использовании зависимости $\alpha/(P + P_0)$ появление угла наклона, близкого к единичному, наступает раньше, чем использование классического решения для линейной фильтрации при меньшем радиусе $rD=750$. Моделирование для $rD=50000$ проводилось для сопоставления полученных кривых с производной для радиального потока в рассматриваемом диапазоне времени.

Для поиска решения использовалось уравнение с иными граничными условиями [19], но общий подход замены коэффициента сжимаемости функцией $\alpha/(P + P_0)$ не изменился. В итоге отсутствие учета сжимаемости от давления приводит к ошибочному занижению расстояния до границ пласта, а в случае замкнутой залежи при исследовании разведочных и поисковых скважин - к значительному занижению размеров и соответственно запасов залежи.

Представляет интерес сопоставление результатов интерпретации синтетической кривой давления, созданной с учетом обратной зависимости сжимаемости от давления, с результатами по модели, основанной на линейной фильтрации. С этой целью выполнена интерпретация созданной кривой откачки по программе Saphir (Рис. 6). Как и ожидалось, отсутствие учета коэффициента сжимаемости от давления привело к завышению скин-фактора, занижению проницаемости и к существенному занижению радиуса непроницаемой границы пласта (Табл. 1). Последнее полностью согласуется с известным значительным влиянием пористости и коэффициента сжимаемости на достоверность определения расстояния до границ [19].

При этом задание синтетической кривой для линейной фильтрации приводило к полному совпадению кривых. Следует также отметить, что в случае обратной зависимости коэффициента сжимаемости от давления угол наклона производной для псевдоустановившегося потока становится больше единичного (Рис. 6) [19], что иногда встречалось в практике интерпретации реальных КВД, но относилось к ошибке. Влияние концевых эффектов производной в данном случае, естественно, исключалось.

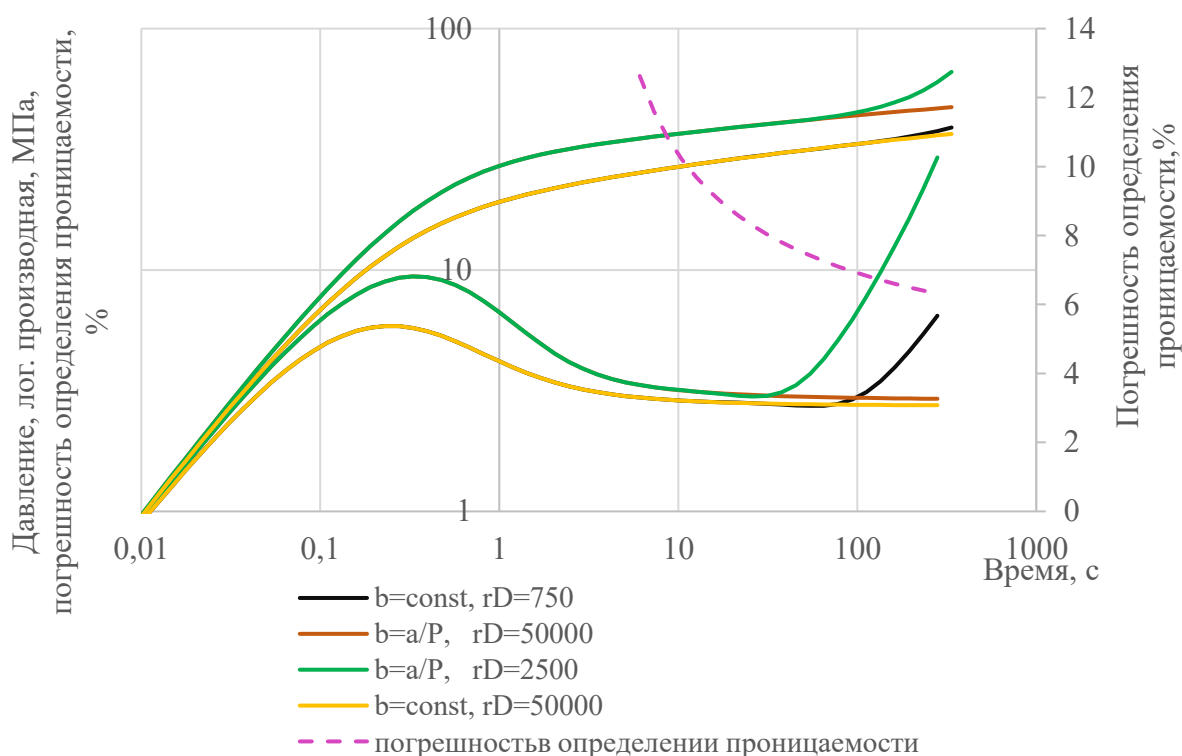


Рис. 5. Влияние начального забойного давления на вид кривых давления и лог производной в билогарифмических координатах ($\beta = 8^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $\alpha = 0,0008$, забойное давление 1 МПа)

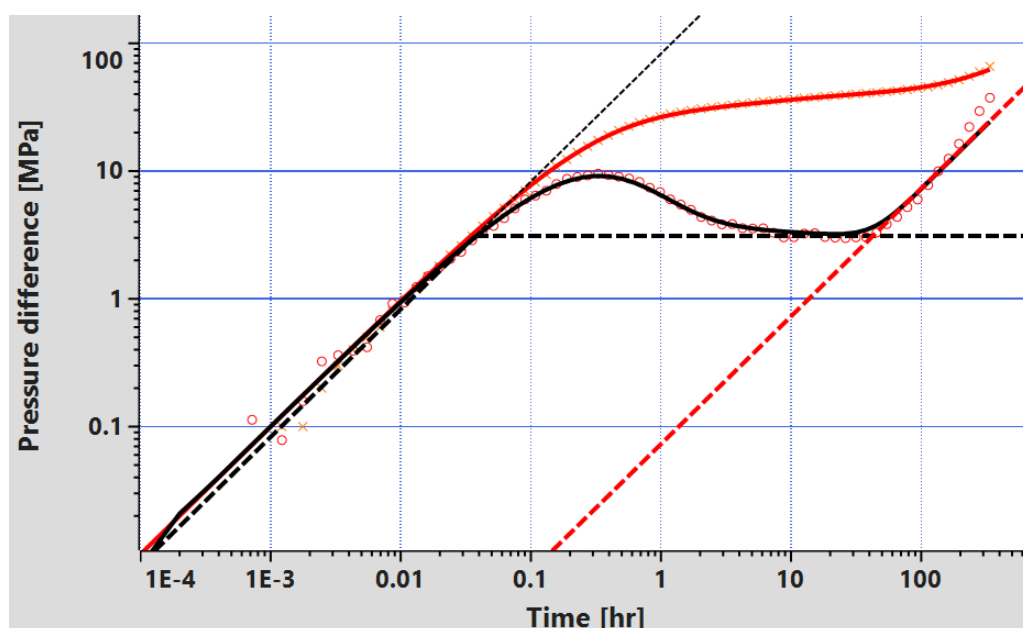


Рис. 6. Пример интерпретации созданной кривой давления с изменяющейся сжимаемостью при помощи модели линейной фильтрации в билогарифмических координатах

Таблица 1

Сопоставление результатов интерпретации кривой откачки различными моделями ($\beta = 8^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $\alpha = 0,0008$)

Параметр	Заданное значение по предлагаемой модели	Рассчитанное по традиционной модели (Saphir)
Коэффициент притока, $\text{м}^3/\text{МПа}$	0,01	0,012
Гидропроводность, $\text{мкм}^2\cdot\text{м}/(\text{Па}\cdot\text{с})$	10,0	9,2
Скин-фактор	0,0	1,1
Радиус круговой непроницаемой границы пласта, м	250	32,5

Заметим, что аналогичные ошибки по скин-фактору и проницаемости, а также более длительному времени снятия КВД, могут встречаться не только при значительных депрессиях, но и при малой депрессии в случае высоковязких нефтей, которые благодаря структуре макромолекул обладают повышенными вязкоупругими свойствами [17], а также для месторождений, в которых появляются мельчайшие пузырьки газа в призабойной и удаленной зонах пласта. Причиной отмеченных тенденций является высо-

кая сжимаемость флюида и его зависимость от давления. Данную тенденцию косвенно подтверждают гидродинамические исследования скважин турнейского яруса Бавлинского месторождения, которые после значительного снижения забойного давления привели к кратному увеличению времени выхода на радиальный поток и более низкой проницаемости.

Как показали расчеты, на вид КВД или кривой откачки кроме параметра α также влияет начальное забойное давление в скважине, однако выполненные расчеты свидетельствуют, что это влияние не столь существенно при больших депрессиях, а при малых депрессиях уже уменьшается влияние непостоянства коэффициента сжимаемости. Однако в общем случае влияние забойного давления перед изменением режима или остановкой скважины желательно учитывать.

Основные выводы

Таким образом, несмотря на известную более 80 лет логарифмическую зависимость пористости от давления, данный фактор не учитывается в программных комплексах по моделированию и исследованию скважин. Показано, что для логарифмической зависимости пористости от давления сжимаемость породы обратно пропорциональна давлению, аналогичная тенденция известна для сжимаемости нефти. Рассмотрен порядок коэффициентов пропорциональности этих зависимостей. Предложен и апробирован алгоритм расчета уравнения пьезопроводности с учетом зависимости сжимаемости от давления. Выполненные расчеты показали, что отсутствие учета данного фактора в основном приводит к завышению скин-фактора, занижению проницаемости и к существенному занижению расстояния до границ пласта. Последнее наиболее важно для оценки запасов по результатам гидродинамических исследований разведочных и поисковых скважин. Замечено, что для псевдоустановившейся фильтрации угол наклона производной становится больше единицы. Степень отличия от линейной фильтрации

определяется различием коэффициента сжимаемости $\beta = const$ от функции $\beta = \alpha/P$. Наибольший эффект от предлагаемого приближенного подхода в сравнении с линейной фильтрацией должен наблюдаться при высокой сжимаемости флюидов (для высоковязких нефтей, при давлениях, близких к давлению насыщения), коллектора, а также для значительных депрессий.

Список литературы

1. Muskat M. The flow of compressible fluids through porous media and some problems in heat conduction. //Physics, V.5,1934, №3, March, pp. 71-94.
2. Hurst, W. Unsteady flow of fluids in oil reservoirs. [Text] / W. Hurst // Physics. – 1934. - Jan. - V.5. - № 1. - P. 20-30.
3. Щелкачев, В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации [Текст]: Монография: В 2 ч. М.: Нефть и газ, 1995. Ч. 2. 493 с.
4. Чарный, И.А. Подземная гидрогазодинамика [Текст] / И.А. Чарный - М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
5. Сокотущенко В.М., Развитие методов построения комплексных гидродинамических моделей нефтегазодобычи с учётом неравновесности и нелинейности пластовых процессов. Автореф. дисс. доктора техн. наук. – М. 2024. – 48 с.
6. Иктисанов В.А. Контроль и регулирование разработки нефтяных месторождений: Оптимизация добычи нефти регулированием забойных давлений. 2024. 252 с.
7. Терцаги К. Строительная механика грунта на основе его физических свойств. М.: Госстройиздат, 1933.
8. Milad Farahani, Hamed Aghaei, Hossein Masoumi, Effect of pore type on porosity, permeability and pore volume compressibility of geological formations due to in-situ stress change, Journal of Petroleum Science and Engineering, Volume 218, 2022, 110986, ISSN 0920-4105, <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2022.110986>.
9. Milad Farahani, Hamed Aghaei, Mohammad Saki, Seyed Reza Asadolahpour, Prediction of pore volume compressibility by a new non-linear equation in carbonate reservoirs, Energy Geoscience, Volume 3, Issue 3, 2022, Pages 290-299, ISSN 2666-7592, <https://doi.org/10.1016/j.engeos.2022.04.005>.
10. Жуков В.С., Кузьмин Ю.О. Сопоставление подходов к оценке сжимаемости порового пространства // Записки Горного института. 2022. Т. 258. С. 1008-1017. DOI: 10.31897/PMI.2022.97
11. Liu B. et al. Stress sensitivity of tight reservoirs and its effect on oil saturation: A case study of Lower Cretaceous tight clastic reservoirs in the Hailar Basin, Northeast China //Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2020. – Т. 184. – С. 106484. DOI: 10.1016/j.petrol.2019.106484
12. Добрынин В.М. Деформации и изменение физических свойств коллекторов нефти и газа, Недра, с.239, 1970.
13. Николаевский, В.Н. Геомеханика и флюидодинамика [Текст] / В.Н. Николаевский - М.: Недра, 1996. - 447 с.
14. Желтов Ю.П. Деформация горных пород. – М.: Недра, 1966. – 198 с.

15. Дияшев, Р.Н. Фильтрация жидкости в деформируемых нефтяных пластах [Текст] / Р.Н. Дияшев, А.В. Костерин, Э.В. Скворцов – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 1999. – 238 с.
16. Горбунов, А.Т. Разработка аномальных нефтяных месторождений [Текст] / А.Т. Горбунов – М.: Недра, 1981. - 237 с.
17. Молокович, Ю.М. Пьезометрия окрестности скважины [Текст] / Ю.М. Молокович, А.И. Марков, А.А. Давлетшин и др // Теоретические основы. – Казань: Изд ДАС, 1990. - 203 с
18. Мирзаджанзаде, А.Х. Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей [Текст] / А.Х. Мирзаджанзаде, А.Г. Ковалев, Ю.В. Зайцев - М.: Недра, 1972. – 200 с.
19. Allain, O. Dynamic Flow Analysis [E. recourse] O, Allain, E. Tauzin [et al.] – KAPPA, 2007.
20. Horne, R.N. Modern well test analysis. A computer-aided approach. - Petroway, Inc., 2000. – 257 p.
21. Vasquez, M.; Beggs, H.D. (1980). "Correlations for Fluid Physical Properties Prediction" Free registration required. Journal of Petroleum Technology. Society of Petroleum Engineers. 32 (SPE-6719-PA).
22. Stehfest H., Numerical inversion of Laplace transforms algorithm 368. Commun. ACM 13 (1) (1979) 47-49.

References

1. Muskat, M. The flow of compressible fluids through porous media and some problems in heat conduction. Physics, 1934, Vol. 5, No. 3 (March), pp. 71-94. (in English)
2. Hurst, W. Unsteady flow of fluids in oil reservoirs. Physics, 1934, Vol. 5, No. 1 (January), pp. 20-30. (in English)
3. Shchelkachev V.N. Osnovy i prilozheniya teorii neustanovivsheisya fil'tratsii [Fundamentals and applications of unsteady-state flow theory]. Moscow: Neft i Gaz Publ., 1995, Part 2. 493 p. (in Russian)
4. Charnyi I.A. Podzemnaya gidrogazodinamika [Underground fluid and gas dynamics]. Moscow: Gostoptekhizdat Publ., 1963. 396 p. (in Russian)
5. Sokotushchenko V.M. Razvitie metodov postroeniya kompleksnykh gidrodinamicheskikh modelei neftegazodobychi s uchetom neravnovesnosti i nelineinosti plastovykh protsessov [Development of methods for generation of complex simulation models of oil and gas production considering nonequilibrium and nonlinearity of reservoir processes]. Doctoral thesis abstract. Moscow, 2024. 48 p. (in Russian)
6. Iktisanov V.A. Kontrol' i regulirovanie razrabotki neftyanykh mestorozhdenii: Optimizatsiya dobychi nefti regulirovaniem zaboinykh davlenii [Monitoring and management of oil field development: Optimization of oil production through bottomhole pressure control]. 2024. 252 p. (in Russian)
7. Tertsagi K. Stroitel'naya mekhanika grunta na osnove ego fizicheskikh svoistv [Structural soil engineering based on its physical properties]. Moscow: Gosstroizdat Publ., 1933. (in Russian)
8. Milad Farahani, Hamed Aghaei, Hossein Masoumi. Effect of pore type on porosity, permeability and pore volume compressibility of geological formations due to in-situ stress change. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2022, Vol. 218, 110986, ISSN 0920-4105, <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2022.110986>. (in English)

9. Milad Farahani, Hamed Aghaei, Mohammad Saki, Seyed Reza Asadolahpour. Prediction of pore volume compressibility by a new non-linear equation in carbonate reservoirs. *Energy Geoscience*, 2022, Vol. 3, No. 3, pp. 290-299, ISSN 2666-7592, <https://doi.org/10.1016/j.engeos.2022.04.005>. (in English)
10. Zhukov V.S., Kuz'min Yu.O. Sopostavlenie podkhodov k otsenke szhimaemosti porovogo prostranstva [Comparison of approaches to evaluation of pore space compressibility]. *Zapiski Gornogo Instituta [Journal of Mining Institute]*, 2022, Vol. 258, pp. 1008-1017. DOI: 10.31897/PMI.2022.97 (in Russian)
11. Liu B. et al. Stress sensitivity of tight reservoirs and its effect on oil saturation: A case study of Lower Cretaceous tight clastic reservoirs in the Hailar Basin, Northeast China. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2020, Vol. 184, pp. 106484. DOI: 10.1016/j.petrol.2019.106484 (in English)
12. Dobrynin V.M. Deformatsii i izmenenie fizicheskikh svoystv kollektorov nefi i gaza [Deformations and changes in physical properties of oil and gas reservoirs]. Moscow: Nedra Publ., 1970. 239 p. (in Russian)
13. Nikolaevskii, V.N. Geomekhanika i flyuidodinamika [Geomechanics and fluid dynamics]. Moscow: Nedra Publ., 1996. 447 p. (in Russian)
14. Zheltov Yu.P. Deformatsiya gornykh porod [Rock deformation]. Moscow: Nedra Publ., 1966. 198 p. (in Russian)
15. Diyashev R.N., Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Fil'tratsiya zhidkosti v deformiruemykh neftyanykh plastakh [Fluid flow in deformable oil formations]. Kazan: Kazan Mathematical Society, 1999. 238 p. (in Russian)
16. Gorbunov A.T. Razrabotka anomal'nykh neftyanykh mestorozhdenii [Development of anomalous oil fields]. Moscow: Nedra Publ., 1981. 237 p. (in Russian)
17. Molokovich Yu.M., Markov A.I., Davletshin A.A. P'ezometriya okrestnosti skvazhiny [Piezometry in near wellbore space]. Kazan: DAS Publ., 1990. 203 p. (in Russian)
18. Mirzadzhanzade A.Kh., Kovalev A.G., Zaitsev Yu.V. Osobennosti ekspluatatsii mestorozhdenii anomal'nykh neftei [Peculiar aspects associated with operation of anomalous oil fields]. Moscow: Nedra Publ., 1972. 200 p. (in Russian)
19. Allain, O., Tauzin, E. [et al.]. KAPPA Dynamic Flow Analysis [E. recourse], 2007. (in English)
20. Horne, R.N. Modern well test analysis. A computer-aided approach. Petroway, Inc., 2000. 257 p. (in English)
21. Vasquez, M.; Beggs, H.D. Correlations for Fluid Physical Properties Prediction. *Journal of Petroleum Technology*. Society of Petroleum Engineers, 1980, 32 (SPE-6719-PA). (in English)
22. Stehfest, H. Numerical inversion of Laplace transforms algorithm 368. *Commun. ACM* 13 (1), 1979, pp. 47-49. (in English)

Приложение

Вывод приближенного решения уравнения (7) в преобразовании Лапласа

Исходное уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \frac{\mu \alpha}{k(P+P_0)} = \nabla^2 P. \quad (\text{П1})$$

Покажем, что данное уравнение можно линеаризовать, в результате чего выражение $P + P_0$ сведется к постоянной величине, а в дальнейшем снова учесть нелинейность вспомогательными способами. Для этого введем вспомогательные переменные $Z = P + P_0$ и $\kappa_2 = \frac{k}{\mu\alpha}$, тогда уравнение (П1) для радиального потока можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial t} = \kappa_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z}{\partial r} \right). \quad (\text{П2})$$

Далее сделаем замену $w = \ln Z$, тогда $Z = e^w$, что приводит к нелинейному уравнению:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \kappa_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r e^w \frac{\partial Z}{\partial r} \right). \quad (\text{П3})$$

При малом w , т.е. $Z \approx \text{const}$ можно разложить e^w в ряд Тейлора и ограничиться первым порядком. Пусть $Z = Z_0 + \delta Z$, где Z_0 - некоторое фоновое давление), а δZ - малая добавка. Тогда $u \approx \ln Z_0 + \frac{\delta Z}{Z_0}$ и $e^w \approx Z_0 + \delta Z$.

Уравнение для малых возмущений δZ принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\ln Z_0 + \frac{\delta Z}{Z_0} \right) = \kappa_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r (Z_0 + \delta Z) \frac{\partial \left(\ln Z_0 + \frac{\delta Z}{Z_0} \right)}{\partial r} \right). \quad (\text{П4})$$

Для постоянного значения $Z_0 \approx \text{const}$ производные от $\ln Z_0$ исчезают, и получаем:

$$\frac{1}{Z_0} \frac{\partial \delta Z}{\partial t} = \kappa_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r (Z_0 + \delta Z) \frac{1}{Z_0} \frac{\partial \delta Z}{\partial r} \right). \quad (\text{П5})$$

Пренебрегая δZ в скобках, получаем линеаризованное уравнение пьезопроводности:

$$\frac{\partial \delta Z}{\partial t} = \kappa_2 Z_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta Z}{\partial r} \right), \quad (\text{П6})$$

которое можно решить уже традиционным образом через модифицированные функции Бесселя:

$$\overline{\delta Z} = AK_0(u) + BI_0(u), \quad (\text{П7})$$

Из внешнего граничного условия (бесконечный пласт) $B=0$, из внутреннего граничного условия для скважины конечного радиуса:

$$A = \frac{1}{u\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})}. \quad (\text{П8})$$

$$\text{где } u = r \sqrt{\frac{s}{\kappa_2 Z_0}}. \quad (\text{П9})$$

В итоге получаем уравнение:

$$\overline{\delta Z} = \frac{1}{u\sqrt{u}} \frac{K_0(\sqrt{u})}{K_1(\sqrt{u})}, \quad (\text{П10})$$

которое по сути представляет известное выражение в безразмерной форме [19]:

$$\overline{P_D} = \frac{1}{u\sqrt{u}} \frac{K_0(\sqrt{u})}{K_1(\sqrt{u})}, \quad (\text{П11})$$

с той разницей, что вместо $\beta_{\text{ск}} + m\beta_{\text{ж}}$ в традиционном выражении для u используется константа α/P_0 .

Далее предположим, что вместо константы α/P_0 возможно использовать функцию давления $\alpha/(P + P_0)$. Тогда получаем уравнение (П11) в неявном виде, где

$$u = r \sqrt{s \frac{\mu\alpha}{k(P+P_0)}}. \quad (\text{П12})$$

Для решения уравнения (П11) по алгоритму Стефеста [22] в трансформанте (П12) возможно использование предыдущего рассчитанного давления. Представленный подход к решению безусловно является приближенным, но позволяет учесть зависимость коэффициентов сжимаемости от давления без использования численных методов. Переход от безразмерного давления к размерному осуществляется по известной формуле:

$$P_D = \Delta P \frac{2\pi kh}{\mu Q}. \quad (\text{П13})$$

Сведения об авторах

Иктисанов Валерий Асхатович, доктор технических наук, профессор кафедры разработки и эксплуатации нефтяных месторождений Санкт-Петербургского горного университета императрицы Екатерины II

Россия, 199106, Санкт-Петербург, Васильевский остров, 21 линия, д. 2

E-mail: iktisanov_va@pers.spmi.ru

Иктисанов Альберт Валерьевич, студент Московского физико-технического института
Россия, 141701, Московская область, Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9
E-mail: a.iktisanov@yandex.ru

Бернатов Максим Сергеевич, аспирант Санкт-Петербургского горного университета им-
ператрицы Екатерины II
Россия, 199106, Санкт-Петербург, Васильевский остров, 21 линия, д. 2
E-mail: s245042@stud.spmi.ru

Authors

V.A. Iktisanov, Dr.Sc., Professor, Oil Field Development Department, St. Petersburg Mining
University of Empress Catherine II
2, 21 Line, Vasilyevsky Island, Saint Petersburg, 199106, Russian Federation
E-mail: iktisanov_va@pers.spmi.ru

A.V. Iktisanov, Student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research Uni-
versity)
9, Institutsky Lane, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russian Federation
E-mail: a.iktisanov@yandex.ru

M.S. Bernatov, postgraduate student, St. Petersburg Mining University of Empress Catherine II
2, 21 Line, Vasilyevsky Island, Saint Petersburg, 199106, Russian Federation
E-mail: s245042@stud.spmi.ru

Статья поступила в редакцию 04.09.2025
Принята к публикации 16.09.2025
Опубликована 30.09.2024